1 定义

1. 命题
   非真即假的陈述句称作**命题**。
   Remark
   悖论不是命题。

2. 原子命题
   不能被分解为更简单的命题称作**简单命题**。

3. 命题的真值
   作为命题的陈述句所表达的判断结果称作命题的**真值**。真值的取值为真或假。
   真值为真的命题为**真命题**，真值为假的命题为**假命题**。

4. 逻辑联结词

   - 否定联结词
     设 p 为命题，复合命题"非 p"或"p 的否定"称作 p 的**否定式**，记作 $\neg p$. 规定 $\neg p$ 为真当且仅当 p 为假。
   - 合取联结词
     设 p, q 为两个命题，复合命题"p 并且 q"或"p 与 q"称为 p 与 q 的**合取式**，记作 $p \wedge q$。规定 $p \wedge q$ 为真当且仅当 p 与 q 同时为真。
   - 析取联结词
     设 p, q 为两个命题，复合命题"p 或 q"称为 p 与 q 的**析取式**，记作 $p \vee q$。规定 $p \vee q$ 为假当且仅当 p 与 q 同时为假。
   - 蕴涵联结词
     设 p, q 为两个命题，复合命题"如果 p, 则 q"称为 p 与 q 的**蕴涵式**，记作 $p \to q$, 并称 p 是蕴涵式的**前件**，q 为蕴涵式的**后件**。规定 $p \to q$ 为假当且仅当 p 为真且 q 为假。
   - 等价联结词
     设 p, q 为两个命题，复合命题"p 当且仅当 q"称为 p 与 q 的**等价式**，记作 $p \leftrightarrow q$。规定 $p \leftrightarrow q$ 为真当且仅当 p 与 q 同时为真或同时为假。
   - 与非联结词
     设 p, q 为两个命题，复合命题"p 与 q 的否定式"称作 p, q 的**与非式**，记作 $p \uparrow q$。规定 $p \uparrow q$ 为真当且仅当 p 与 q 不同时为真。
   - 或非联结词
     设 p, q 为两个命题，复合命题"p 或 q 的否定式"称作 p, q 的**或非式**，记作 $p \downarrow q$。规定 $p \downarrow q$ 为真当且仅当 p 与 q 同时为假。

5. 合式公式

   - 单个命题变项和命题变项是合式公式
   - 若 A 是合式公式，则 $(\neg A)$ 是合式公式
   - 若 A, B 是合式公式，则 $(A \wedge B), (A \vee B), (A \to B), (A \leftrightarrow B)$ 是合式公式。

- 有限次地应用前三个方法形成的符号串是合式公式

6. 公式的层次
    - 若公式 A 是单个的命题变项，则称 A 为 0 层公式
    - 称 A 是 $n+1(n \geq 0)$ 层公式是指下面情况之一
        - $A = \neg B$,B 是 n 层公式
        - $A = B \wedge C$, 其中 B, C 分别为 i 层和 j 层公式，且 $n = \max(i, j)$
        - $A = B \vee C$, 其中 B, C 分别为 i 层和 j 层公式，且 $n = \max(i, j)$
        - $A = B \rightarrow C$, 其中 B, C 分别为 i 层和 j 层公式，且 $n = \max(i, j)$
        - $A = B \leftrightarrow C$, 其中 B, C 分别为 i 层和 j 层公式，且 $n = \max(i, j)$
    - 若公式 A 的层次为 k. 则称 A 为 k 层公式。

7. 赋值
设 $p_1, p_2, \ldots, p_n$ 是出现在公式 A 中的全部命题变项，给 $p_1, p_2, \ldots, p_n$ 各指定一个真值，称为对 A 的一个**赋值**或**解释**。若指定的一组值使 A 为 1, 则称这组值为 A 的**成真赋值**；若使 A 为 0, 则称这组值为 A 的**成假赋值**。

8. 命题公式的种类
设 A 为任一命题公式
    - 若 A 在它的各种赋值下取值均为真，则称 A 为**重言式**或**用真式**
    - 若 A 在它的各种赋值下取值均为假，则称 A 为**矛盾式**或**永假式**
    - 若 A 不是矛盾式，则称 A 为**可满足式**

9. 等值
设 A, B 是两个命题公式，若 A, B 构成的等价式 $A \leftrightarrow B$ 为重言式，则称 A 与 B 是**等值**的，记作 $A \Leftrightarrow B$.

10. 文字
命题变项及其否定统称作**文字**。

11. 简单析取式
仅有有限个文字构成的析取式称作**简单析取式**。

12. 简单合取式
仅有有限个文字构成的合取式称作**简单合取式**。

13. 范式
由有限个简单合取式的析取构成的命题公式称作**析取范式**。
由有限个简单析取式的合取构成的命题公式称作**合取范式**。
析取范式与合取范式统称作范式。
Remark
范式不一定唯一。如：
$p \wedge q \wedge r$ 是范式，$p \wedge q \wedge r \wedge (r \vee \neg r)$ 也是范式

14. 极小项
    在含有 n 个命题的简单合取式中，若每个命题变项和它的否定式恰好出现一个且仅出现一次，而且命题变项或它的否定式按照下表从小到大或按照字典顺序排列，称这样的简单合取式为**极小项**。
    若极小项的成真赋值所对应的二进制数等于十进制数 i, 就将这个极小项记作 m_i.
    Remark
    如：$p_1 \wedge \neg p_2 \wedge p_3$ 的成真赋值所对应的二进制数 101 等于十进制数 5, 故可将其记作 m_5.

15. 极大项
    在含有 n 个命题的简单析取式中，若每个命题变项和它的否定式恰好出现一个且仅出现一次，而且命题变项或它的否定式按照下表从小到大或按照字典顺序排列，称这样的简单析取式为**极大项**。
    若极大项的成假赋值所对应的二进制数等于十进制数 i, 就将这个极小项记作 M_i.
    Remark
    如：$p_1 \vee \neg p_2 \vee p_3$ 的成假赋值所对应的二进制数 010 等于十进制数 3, 故可将其记作 M_3.

16. 主析取范式
    所有简单合取式都是极小项的析取范式称为**主析取范式**。

17. 主合取范式
    所有简单析取式都是极大项的合取范式称为**主合取范式**。

18. n 元真值函数
    称 $F : \{0,1\}^n \to \{0,1\}$ 为n **元真值函数**
    Remark
    n 元真值函数有 2^{2^n} 个

19. 联结词完备集
    设 S 是一个联结词集合，如果任何 $n(n \geq 1)$ 元真值函数都可以有仅含 S 中的联结词构成的公式表示，则称 S 是**联结词完备集**。

20. 推理
    已知的命题公式集合称为**前提**，从前提出发应用推理规则推出的命题公式称为**结论**，从前提出发推出结论的思维过程称为**推理**。
    设前提的集合为 Γ, 结论为 B，则记推理为 $\Gamma \vdash B$.

21. 有效推理
    设 $A_1, A_2, \ldots, A_k$ 和 B 都是命题公式，若对于 $A_1, A_2, \ldots, A_k$ 和 B 中出现的命题变项的任意一组赋值，或者 $A_1 \wedge A_2 \wedge \cdots \wedge A_k$ 为假，或者 $A_1 \wedge A_2 \wedge \cdots \wedge A_k$ 为真时 B 也为真，则称由前提 $A_1, A_2, \ldots, A_k$ 推出结论 B 的推理是**有效推理**，并称 B 为**有效的结论**。记作 $\Gamma \vDash B$. 否则，记为 $\Gamma \nvDash B$.

22. 形式系统
    一个**形式系统**I 由下面 4 个部分组成

    - 非空的字母表 $A(I)$
    - $A(I)$ 中符号构造的合式公式集 $E(I)$

- $E(I)$ 中一些特殊的公式构成的公理集 $A_X(I)$
- 推理规则集 $R(I)$

将 I 记为 4 元组 $\langle A(I), E(I), A_X(I), R(I)\rangle$. 其中 $\langle A(I), E(I)\rangle$ 是 I 的**形式语言系统**，而 $\langle A_X(I), R(I)\rangle$ 是 I 的**形式演算系统**。

23. 自然推理系统
自然推理系统 P 定义如下

- 字母表
  - 命题变项符号
  $$p, q, r, \ldots, p_i, q_i, r_i, \ldots (i \geq 1)$$
  - 联结词符号
  $$\neg, \wedge, \vee. \rightarrow, \leftrightarrow$$
  - 括号与逗号
  $$(,),,$$
- 合式公式
- 推理规则
  - 前提引入规则
  在证明的任何步骤都可以引入前提
  - 结论引入规则
  在证明的人和步骤所得到的结论都可以作为后继证明的前提
  - 置换规则
  在证明的任何步骤，命题公式中的字公式都可以用等值的公式替换，得到公式序列中的又一公式。

24. 证明
设前提 $A_1, A_2, \ldots, A_k$，结论 B 和公式序列 $C_1, C_2, \ldots, C_l$. 如果每一个 $i(i = 1, 2, \ldots l)$,C_i 是某个 A_i 或者可由序列中前面的公式应用推理规则得到，并且 $C_l = B$, 则称公式序列 $C_1, C_2, \ldots, C_l$ 是由 $A_1, A_2, \ldots, A_k$ 推出 B 的证明。

25. 个体词
个体词是指所研究对象中可以独立存在的具体的或抽象的客体。
将表示具体的或特定的客体的个体词称作**客体常项**。常用小写字母 a, b, c 等表示。
将表示抽象或泛指的个体词称作**个体变项**。常用 x, y, z 等表示。

26. 个体域
个体变项的取值范围称作**个体域**。
全总个体域是由宇宙间一切事物组成的。

27. 谓词
谓词是用来刻画个体词性质及个体词之间相互关系的词，常用 F, G, H 等表示。

28. 量词
表示个体常项或变项之间数量关系的词称作**量词**。

- 全称量词
  “一切的”“所有的”等词统称作**全称量词**，用符号 $\forall$ 表示，$\forall x$ 表示个体域里所有的个体 x，其中个体域是事先确定的。
- 存在量词
  “存在”“有一个”等词统称作**存在量词**，用符号 $\exists$ 表示，$\exists x$ 表示个体域里有一个个体 x.
  Remark
  “存在 x 满足性质 p, 使得 q.”符号化应为 $\exists x(p \wedge q)$

29. 一阶语言
用于一阶逻辑的形式语言是**一阶语言**。

30. 一阶语言的字母表
设 L 是一个非逻辑符号集合，由 L 生成的一阶语言 $\mathscr{L}$ 的**字母表**包括下述符号：

- 非逻辑符号
  - L 中的个体常项符号，常用 $a, b, c \ldots$ 表示
  - L 中的函数符号，常用 $f, g, h \ldots$ 表示
  - L 中的谓词符号，常用 $F, G, H \ldots$ 表示
- 逻辑符号
  - 个体变项符号，常用 $x, y, z \ldots$ 表示
  - 量词符号 $\forall, \exists$
  - 联结词符号 $\neg, \wedge, \vee, \rightarrow, \leftrightarrow$
  - 括号与逗号 (,), ,

31. 一阶逻辑的项
一阶语言 $\mathscr{L}$ 的**项**的定义如下

(a) 个体常项符号和个体变项符号是项
(b) 若 $\varphi(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ 是 n 元函数符号，$t_1, t_2, \ldots, t_n$ 是 n 个项，则 $\varphi(t_1, t_2, \ldots, t_n)$ 是项
(c) 所有的项都是由以上两条得到的

32. 一阶逻辑的原子公式
设 $R(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ 是一阶语言 $\mathscr{L}$ 的 n 元谓词符号，$t_1, t_2, \ldots, t_n$ 是 $\mathscr{L}$ 的 n 个项，则称 $R(t_1, t_2, \ldots, t_n)$ 是 $\mathscr{L}$ 的**原子公式**。

33. 一阶逻辑的合式公式
一阶语言 $\mathscr{L}$ 的**合式公式**定义如下

- 原子公式是合式公式
- 若 A 是合式公式，则 $(\neg A)$ 也是合式公式
- 若 A, B 是合式公式，则 $(A \wedge B), (A \vee B), (A \rightarrow B), (A \leftrightarrow B)$ 也是合式公式
- 若 A 是合式公式，则 $\forall x A$ 和 $\exists A$ 也是合式公式

- 只有有限次地应用上述四条构成的符号串才是合式公式

34. 指导变元与辖域
在公式 $\forall xA$ 和 $\exists xA$ 中，称 x 为**指导变元**，A 为量词的**辖域**。在 $\forall x$ 和 $\exists x$ 中，x 的所有出现都称作**约束出现**，A 中不是约束出现的其他变项均称作**自由出现**。

35. 闭式
设 A 是任意的公式，若 A 中不含自由出现的个体变项，则称 A 为**闭式**。

36. 一阶语言的解释
设 $\mathscr{L}$ 是由 L 生成的一阶语言,$\mathscr{L}$ 的**解释**I 由下面 4 部分组成

    - 非空个体域 D_I
    - 对每一个个体常项符号 $a \in L$, 有一个 $\bar{a} \in D_I$, 称 $\bar{a}$ 为 a 在 I 中的解释
    - 对每一个 n 元函数符号 $f \in L$, 有一个 D_I 上的 n 元函数 $\bar{f} : D_I^n \to D_I$, 称 $\bar{f}$ 为 f 在 I 中的解释
    - 对每一个 n 元谓词符号 $F \in L$，有一个 D_I 上的 n 元谓词常项 $\bar{F}$, 称 $\bar{F}$ 为 F 在 I 中的解释

37. 一阶逻辑的公式的种类
设 A 是一公式

    - 若 A 在任何解释和该解释下的任何赋值均为真，则称 A 是**永真式**
    Remark
    不称一阶逻辑中的永真式为重言式。
    - 若 A 在任何解释和该解释下的任何赋值均为假，则称 A 是**矛盾式**
    - 若至少存在一个解释和该解释下的一个赋值使 A 为真，则称 A 是**可满足式**

38. 代换实例
设 A_0 是含命题常项 $p_1, p_2, \ldots, p_n$ 的命题公式, $A_1, A_2, \ldots, A_n$ 是 n 个谓词公式, 用 $A_i(1 \leq i \leq n)$ 处处替代 A_0 中的 p_i, 所得公式 A 称为 A_0 的**代换实例**。

39. 前束范式
具有如下形式
$$Q_1x_1Q_2x_2 \cdots Q_kx_kB$$
的一阶逻辑公式称作**前束范式**，其中 $Q_i(1 \leq i \leq k)$ 为 $\forall$ 或 $\exists$,B 为不含量词的公式。

2 定理

1. 代替规则
设 A 是一个命题公式，含有命题变项 $p_1, p_2, \ldots, p_n$, 又设 $A_1, A_2, \ldots, A_n$ 是任意的命题公式。对每一个 i, 将 p_i 在 A 中的出现都替换为 A_i, 得到的新命题公式记作 B. 那么，若 A 是重言式, 则 B 是重言式

2. 置换规则
设 A, B 是命题公式, 映射 Φ 构成新的命题公式 $\Phi(A), \Phi(B)$. 那么, 若 $A \Leftrightarrow B$, 则 $\Phi(A) \Leftrightarrow \Phi(B)$.

3. 等值式模式

- $$A \Leftrightarrow \neg\neg A$$

- $$A \Leftrightarrow A \vee A, A \Leftrightarrow A \wedge A$$

- $$A \vee B \Leftrightarrow B \vee A, A \wedge B \Leftrightarrow B \wedge A$$

- $$(A \vee B) \vee C \Leftrightarrow A \vee (B \vee C)$$
  $$(A \wedge B) \wedge C \Leftrightarrow A \wedge (B \wedge C)$$

- $$A \vee (B \wedge C) \Leftrightarrow (A \vee B) \wedge (A \vee C)$$
  $$A \wedge (B \vee C) \Leftrightarrow (A \wedge B) \vee (A \wedge C)$$

- $$\neg(A \vee B) \Leftrightarrow \neg A \wedge \neg B, \neg(A \wedge B) \Leftrightarrow \neg A \vee \neg B$$

- $$A \vee (A \wedge B) \Leftrightarrow A, A \wedge (A \vee B) \Leftrightarrow A$$

- $$A \vee 0 \Leftrightarrow A, A \wedge 1 \Leftrightarrow A$$

- $$A \vee \neg A \Leftrightarrow 1, A \wedge \neg A \Leftrightarrow 0$$

- $$A \rightarrow B \Leftrightarrow \neg A \vee B$$

- $$A \leftrightarrow B \Leftrightarrow (A \rightarrow B) \wedge (B \rightarrow A)$$

- $$A \rightarrow B \Leftrightarrow \neg B \rightarrow \neg A$$

- $$A \leftrightarrow B \Leftrightarrow \neg A \leftrightarrow \neg B$$

- $$(A \rightarrow B) \wedge (A \rightarrow \neg B) \Leftrightarrow \neg A$$

4. 简单析取式、简单合取式的性质

- 一个简单析取式是重言式当且仅当它同时含某个命题变项及它的否定式

- 一个简单合取式是矛盾式当且仅当它同时含某个命题变项及它的否定式

5. 范式的性质

   - 一个析取范式是矛盾式当且仅当它的每个简单合取式都是矛盾式
   - 一个合取范式是重言式当且仅当它的每个简单析取式都是重言式

6. 范式存在定理
   任一命题公式都存在与之等值的析取范式与合取范式

7. 极小项与极大项的性质
   设 m_i 与 M_i 是命题变项含 $p_1, p_2, \ldots, p_n$ 的极小项和极大项，则

   $$\neg m_i \Leftrightarrow M_i, \neg M_i \Leftrightarrow m_i$$

   此外，

   $$\neg\left(\bigvee_{i=0}^{m} m_{k_i}\right) \Leftrightarrow \bigvee_{t \neq k_i} m_t$$
   $$\neg\left(\bigwedge_{i=0}^{m} M_{k_i}\right) \Leftrightarrow \bigwedge_{t \neq k_i} M_t$$

   Remark
   如：设命题变项含 p_1, p_2, p_3, 则

   $$\neg\left(m_1 \vee m_3 \vee m_5\right) \Leftrightarrow m_0 \vee m_2 \vee m_4 \vee m_6 \vee m_7$$

   主范式存在定理
   任何命题公式都存在与之等值的主析取范式和主合取范式，并且是唯一的。

8. 常见的联结词完备集

   - $\{\neg, \wedge, \vee\}$
   - $\{\neg, \wedge, \vee, \rightarrow\}$
   - $\{\neg, \wedge, \vee, \rightarrow, \leftrightarrow\}$
   - $\{\neg, \wedge\}$
   - $\{\neg, \vee\}$
   - $\{\neg, \rightarrow\}$
   - $\{\uparrow\}$
   - $\{\downarrow\}$

9. 有效推理的判定
   命题公式 $A_1, A_2, \ldots, A_k$ 推出 B 的推理正确当且仅当

   $$A_1 \wedge A_2 \wedge \cdots \wedge A_k \rightarrow B$$

   是重言式。

10. 推理定律

- 附加律
$$A \Rightarrow (A \vee B)$$
- 化简律
$$(A \wedge B) \Rightarrow B$$
- 假言推理
$$(A \to B) \wedge A \Rightarrow B$$
- 拒取式
$$(A \to B) \wedge \neg B \Rightarrow \neg A$$
- 析取三段论
$$(A \vee B) \wedge \neg B \Rightarrow A$$
- 假言三段论
$$(A \to B) \wedge (B \to C) \Rightarrow (A \to C)$$
- 等价三段论
$$(A \leftrightarrow B) \wedge (B \leftrightarrow C) \Rightarrow (A \leftrightarrow C)$$
- 构造性二难
$$(A \to B) \wedge (C \to D) \wedge (A \vee C) \Rightarrow (B \vee D)$$
特殊形式
$$(A \to B) \wedge (\neg A \to B) \Rightarrow B$$
- 破坏性二难
$$(A \to B) \wedge (C \to D) \wedge (\neg B \vee \neg D) \Rightarrow (\neg A \vee \neg C)$$

11. 命题逻辑中命题种类与一阶逻辑中命题种类的关系
    - 重言式的代换实例都是永真式
    - 矛盾式的代换实例都是矛盾式

12. 一阶逻辑等值式
    - 消去量词等值式
    设个体域为有限集 $D = \{a_1, a_2, \cdots, a_n\}$, 则有
$$\forall x A(x) \Leftrightarrow A(a_1) \wedge A(a_2) \wedge \cdots \wedge A(a_n)$$
$$\exists x A(x) \Leftrightarrow A(a_1) \vee A(a_2) \vee \cdots \vee A(a_n)$$
    - 量词否定等值式
    设公式 $A(x)$ 含自由出现的个体变量 x，则
$$\neg \forall x A(x) \Leftrightarrow \exists x \neg A(x)$$
$$\neg \exists x A(x) \Leftrightarrow \forall x \neg A(x)$$
    - 量词辖域收缩与扩张等值式
    设公式 $A(x)$ 含自由出现的个体变量 x,B 不含 x 自由出现，则

-
$$\begin{aligned}\forall x\,(A(x)\vee B)&\Leftrightarrow\forall xA(x)\vee B\\\forall x\,(A(x)\wedge B)&\Leftrightarrow\forall xA(x)\wedge B\\\forall x\,(A(x)\to B)&\Leftrightarrow\exists xA(x)\to B\\\forall x\,(B\to A(x))&\Leftrightarrow B\to\forall xA(x)\end{aligned}$$

-
$$\begin{aligned}\exists x\,(A(x)\vee B)&\Leftrightarrow\exists xA(x)\vee B\\\exists x\,(A(x)\wedge B)&\Leftrightarrow\exists xA(x)\wedge B\\\exists x\,(A(x)\to B)&\Leftrightarrow\forall xA(x)\to B\\\exists x\,(B\to A(x))&\Leftrightarrow B\to\exists xA(x)\end{aligned}$$

- 量词分配等值式
  设公式 $A(x), B(x)$ 含自由出现的个体变量 x, 则
$$\forall x(A(x)\wedge B(x))\Leftrightarrow\forall xA(x)\wedge\forall xB(x)$$
$$\exists x(A(x)\vee B(x))\Leftrightarrow\exists xA(x)\vee\forall xB(x)$$

13. 一阶逻辑等值演算的规则
    - 置换规则
      设 $\Phi(A)$ 是含公式 A 的公式，$\Phi(B)$ 是用公式 B 取代 $\Phi(A)$ 中所有的 A 之后所得到的公式。那么，若 $A\Leftrightarrow B$, 则 $\Phi(A)\Leftrightarrow\Phi(B)$.
    - 换名规则
      设 A 为一公式, 将 A 中某量词辖域中的一个约束变项的所有出现及相应的指导变元全部改成该量词辖域中未曾出现过的某个个体变项符号，公式中其余部分不变，将所得公式记作 A', 则 $A'\Leftrightarrow A$.
14. 前束范式存在定理
    一阶逻辑中的任何公式都存在与之等值的前束范式。

3 方法

1. 命题的符号化 将命题分解为原子命题，用字母表示，再用逻辑联结词连接。
2. 判断两个公式是否等值的方法
   - 通过列出 $A\leftrightarrow B$ 的真值表来判断。此外，若 A 的真值表与 B 相同，则 $A\Leftrightarrow B$
   - 利用代替规则和置换规则
   - 利用等值式模式
3. 求给定公式范式的方法
   (a) 消去联结词 $\to$ 和 $\leftrightarrow$

(b) 用双重否定律消去双重否定符，用 de Morgan 律内移否定符

(c) 使用分配律。
求析取范式时使用 $\wedge$ 对 $\vee$ 的分配律；
求合取范式时使用 $\vee$ 对 $\wedge$ 的分配律。

4. 求主析取范式的方法

- 方法一
  (a) 将给定公式化为析取范式
  (b) 对于析取范式中的简单合取式 A，若其缺少项 p_i, 则将其变成 $A \wedge (p_i \vee \neg p_i)$
  (c) 展开，化简
  (d) 用极小项表示
- 方法二
  若给定公式的成真赋值对应的二进制数分别等于十进制数 $i_1, i_2, \ldots, i_k$, 则给定公式的主析取范式为 $m_{i_1} \wedge m_{i_2} \wedge \cdots \wedge m_{i_k}$

5. 求主合取范式的方法

- 方法一
  (a) 将给定公式化为合取范式
  (b) 对于合取范式中的简单析取式 A，若其缺少项 p_i, 则将其变成 $A \vee (p_i \wedge \neg p_i)$
  (c) 展开，化简
  (d) 用极大项表示
- 方法二
  若给定公式的成假赋值对应的二进制数分别等于十进制数 $i_1, i_2, \ldots, i_k$, 则给定公式的主合取范式为 $M_{i_1} \wedge M_{i_2} \wedge \cdots \wedge M_{i_k}$

6. 主析取范式与主合取范式的互化

$$\bigwedge_{i=0}^{m} M_{k_i} \Leftrightarrow \bigvee_{t \neq k_i} m_t$$
$$\bigvee_{i=0}^{m} m_{k_i} \Leftrightarrow \bigwedge_{t \neq k_i} M_t$$

Remark
如：设命题变项含 p_1, p_2, p_3, 则

$$M_1 \wedge M_3 \wedge M_5 \Leftrightarrow m_0 \vee m_2 \vee m_4 \vee m_6 \vee m_7$$

7. 判断推理是否正确的方法

- 真值表法
- 等值演算法
- 主析取范式法

8. 构造证明方法

- 附加前提证明法
  若推理的形式结构为
  $$(A_1 \wedge A_2 \wedge \cdots \wedge A_k) \to (A \to B)$$
  那么只需要证明
  $$(A_1 \wedge A_2 \wedge \cdots \wedge A_k \wedge A) \to B$$
- 归谬法
  若推理的形式结构为
  $$(A_1 \wedge A_2 \wedge \cdots \wedge A_k) \to B$$
  那么只需要证明
  $$A_1 \wedge A_2 \wedge \cdots \wedge A_k \wedge \neg B$$
  是矛盾式

9. 一阶语言下对公式的解释
   设公式 A, 规定：在解释 I 和赋值 σ 下
   - 取个体域 D_I
   - 若 A 中含个体常项符号 a 就将它替换成 $\bar{a}$
   - 若 A 中含函数符号 f 就将它替换成 $\bar{f}$
   - 若 A 中含谓词符号 F 就将它替换成 $\bar{F}$
   - 若 A 中含自由出现的个体变项符号 x 就将它替换成 $\sigma(x)$

   就把这样所得到的公式记作 A'. 那么 A 在 I 下的解释就为 A'.

10. 求前束范式的方法
    (a) 消去 $\to, \leftrightarrow$.
    (b) 否定后移
    (c) 换名
        Remark
        尽量少地换名
    (d) 量词辖域扩张

11. 求 Skolem 范式的方法
    - 先将公式转化为前束范式
    - 如果第一个出现的量词是存在量词 $\exists x$, 则用一个逻辑常项 a 代替所有式子中 x, 并删去 $\exists x$
    - 如果存在量词 $\exists m$ 前出现了全称量词 $\forall x_1, \forall x_2, \ldots, \forall x_k$, 则用函数 $f(x_1, x_2, \ldots, x_k)$ 去代替所有式子中的 m, 并删去 $\exists m$
    - 对于全称量词 $\forall y$, 直接删去 $\forall y$，保留式子中的所有 y.

12. 量词消去、引入规则

- 全称量词消去规则

$$\forall x A(x) \Rightarrow A(y)$$
$$\forall x A(x) \Rightarrow A(c)$$

  其中 x, y 是个体变项符号，c 是个体常项符号
- 全称量词引入规则

$$A(y) \Rightarrow \forall x A(x)$$

  其中 y 是个体变项符号
- 存在量词消去规则

$$\{\exists x A(x), A(y) \rightarrow B\} \Rightarrow B$$
$$\{\exists x A(x), A(c) \rightarrow B\} \Rightarrow B$$

  其中 y 是个体变项符号，c 是个体常项符号
- 存在量词引入规则

$$A(y) \Rightarrow \exists x A(x)$$
$$A(c) \Rightarrow \exists x A(x)$$

  其中 x, y 是个体变项符号，c 是个体常项符号