1 定义

1. 行列式

   - 递推定义
     一阶行列式
     $$|a| = a,$$
     n 阶行列式
     $$|(a_{ij})_{n\times n}| = \sum_{i=1}^{n}(-1)^{i+j}M_{ij} = \sum_{i=1}^{n}A_{ij}.$$
   - 排列定义
     $$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = \sum_{\substack{i_1 i_2 \cdots i_n \\ \text{为}12\cdots n\text{的全排列}}} (-1)^{\tau(i_1 i_2 \cdots i_n)} a_{1i_1} a_{2i_2} \cdots a_{ni_n}.$$

2. 余子式
   行列式 $|(a_{ij})_{n\times n}|$ 在第 m 行第 k 列的位置 (m,k) 处的余子式 M_{mk} 是矩阵 $(a_{ij})_{n\times n}$ 划去第 m 行与第 k 列后剩下的元素按原来的相对位置排成的 $n-1$ 阶行列式。

3. 代数余子式
   $$A_{mk} = (-1)^{m+k}M_{mk}$$

4. 逆序数

   - 设 $i_1 i_2 \cdots i_k \cdots i_n$ 是正整数 $1 \sim n$ 的一个排列，则 i_k 在此排列中的逆序数 τ_k 为排在数 i_k 之前比 i_k 大的数的个数。
   - 一个排列的逆序数为这个排列的所有数的逆序数之和。

5. 奇排列
   逆序数为奇数的排列是奇排列。

6. 偶排列
   逆序数为偶数的排列是偶排列。

7. 对换
   将一个排列中的两个元素互换位置，其余元素位置保持不变。

8. 相邻对换
   如果对换中的两个元素在排列中处于相邻位置上，则称这样的对换为相邻对换。

9. 主对角线
   行列式 $|(a_{ij})_{n\times n}|$ 中所有元素 $a_{ii}, i = 1, 2, \ldots, n$ 构成这个行列式的主对角线。

10. 次对角线
    行列式 $|(a_{ij})_{n\times n}|$ 中所有元素 $a_{i,(n-i+1)}, i = 1, 2, \ldots, n$ 构成这个行列式的次对角线。

11. 对角行列式
主对角线上的元素不全为零，其他位置上的元素全为零的行列式。
形如:
$$\begin{vmatrix} a_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & a_{22} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

12. 上三角行列式
主对角线及其上方的元素不全为零，其他位置上的元素全为零的行列式。
形如:
$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

13. 下三角行列式
主对角线及其下方的元素不全为零，其他位置上的元素全为零的行列式。
形如：
$$\begin{vmatrix} a_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

14. Vandermonde 行列式
$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ a_1 & a_2 & \cdots & a_n \\ a_1^2 & a_2^2 & \cdots & a_n^2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_1^{n-1} & a_2^{n-1} & \cdots & a_n^{n-1} \end{vmatrix}$$

15. 线性方程组
由线性方程 $\sum\limits_{k=1}^{n} a_{ki}x_{ki} = b_i, i = 1, 2, \ldots, m$ 组成的方程组。
可表示为以下几种形式：

- 算术方程
$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases} .$$
- 向量方程
$$x_1a_1 + x_2a_2 + \cdots + x_na_n = b,$$

其中

$$a_i=\begin{pmatrix}a_{1i}\\a_{2i}\\\vdots\\a_{mi}\end{pmatrix},b=\begin{pmatrix}b_1\\b_2\\\vdots\\b_m\end{pmatrix}.$$

- 矩阵方程

$$AX=b,$$

其中

$$A=\begin{pmatrix}a_{11}&a_{12}&\cdots&a_{1n}\\a_{21}&a_{22}&\cdots&a_{2n}\\\vdots&\vdots&\ddots&\vdots\\a_{m1}&a_{m2}&\cdots&a_{mn}\end{pmatrix},x=\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\\vdots\\x_m\end{pmatrix},b=\begin{pmatrix}b_1\\b_2\\\vdots\\b_m\end{pmatrix}.$$

16. 齐次线性方程组
组成该线性方程组的线性方程的常数项均为 0。

17. 非齐次线性方程组
组成该线性方程组的线性方程的常数项不全为 0。

18. 相容线性方程组
有解的线性方程组。

19. 不容线性方程组
无解的线性方程组。

20. 线性方程组的初等变换
    - 换位变换
    互换两个方程的位置。
    - 倍乘变换
    用一个非零的数同乘某一个方程的等号两端。
    - 消去变换
    把一个方程的等号两端同乘以 k 倍，分别加到另一个方程的等号两端。

21. 同解变换
不改变线性方程组解的变换。

22. 矩阵
mn 个数 $a_{ij}(i=1,2,\cdots,m,j=1,2,\cdots,n)$ 排列成 m 行 n 列的矩形阵列

$$A=\begin{pmatrix}a_{11}&a_{12}&\cdots&a_{1n}\\a_{21}&a_{22}&\cdots&a_{2n}\\\vdots&\vdots&\ddots&\vdots\\a_{m1}&a_{m2}&\cdots&a_{mn}\end{pmatrix}$$

称为一个 $m\times n$ 矩阵，简记为 $A=(a_{ij})_{m\times n}$。当 $m=n$ 时，它的行列式记作 $|A|$,$|(a_{ij})_{n\times n}|$ 或 $\det A$。在矩阵中，常用 $*$ 表示任意常数。在许多 0 元十分集中的时候，可以把 0 元省略。

23. 矩阵的型

    对于矩阵 $A=(a_{ij})_{m\times n}$，$m\times n$ 称为矩阵的型。

24. 行向量

    1 行 n 列的矩阵。

25. 列向量

    n 行 1 列的矩阵。由于排版原因常记作 $(a_1,a_2,\cdots,a_n)^{\mathrm{T}}$。

26. 零矩阵

    所有项均为 0 的矩阵称为零矩阵，简记为 0.

27. 方阵

    行数等于列数的矩阵。

28. 对角阵

    主对角线上的元素不全为零，其他位置上的元素全为零的矩阵。常记作 Λ.

    形如:

$$\begin{pmatrix} a_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & a_{22} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

    也可记作 $\mathrm{diag}(a_{11},a_{22},\cdots,a_{nn})$.

29. 上三角阵

    主对角线及其上方的元素不全为零，其他位置上的元素全为零的矩阵。

    形如:

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

30. 下三角阵

    主对角线及其下方的元素不全为零，其他位置上的元素全为零的矩阵。

    形如：

$$\begin{pmatrix} a_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

31. 单位阵

    主对角线上的元素均为 1 的对角阵。常记作 E.

    形如：

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix}$$

32. 线性方程组的系数矩阵
对于线性方程组

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases},$$

矩阵

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

称为该线性方程组的系数矩阵。

33. 线性方程组的增广矩阵
对于线性方程组

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases},$$

矩阵

$$(A, b) = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} & b_2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} & b_m \end{pmatrix}$$

称为该线性方程组的增广矩阵。

34. 矩阵的初等行变换
   - 互换矩阵的两行
   - 把矩阵的某一行的 k 倍加到另一行
   - 用一个非零数 k 乘矩阵某一行

35. 矩阵的初等列变换
   - 互换矩阵的两列
   - 把矩阵的某一列的 k 倍加到另一列
   - 用一个非零数 k 乘矩阵某一列

36. 矩阵的初等变换
矩阵的初等行变换和初等列变换统称为初等变换。

37. 行阶梯形矩阵
满足全零行位于非零行的下方，非零行的非零首元 (自左至右第一个不为零的元，称为

主元) 列表随行标的递增而递增的矩阵称为行阶梯形矩阵。

形如：

$$\begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1,j_1-1} & a_{1j_1} & \cdots & a_{1,j_r-1} & a_{1j_r} & \cdots & a_{1n} \\ 0 & \cdots & 0 & a_{2j_2} & \cdots & a_{2,j_r-1} & a_{2j_r} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 & a_{rj_r} & \cdots & a_{rn} \\ 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix}$$

38. 行最简形矩阵

    如果一个行阶梯形矩阵的非零首元所在列上非零首元为数值 1，其他项为 0，则称之为行最简形矩阵。

39. 方阵的幂

    对于方阵 A,$A^0 = E, A^{n+1} = AA^n = A^nA.$

40. 方阵的多项式

    设 A_n 为 n 阶方阵, 多项式 $f(x) = a_mx^m + a_{m-1}x^{m-1} + \cdots + a_1x + a_0$, 则称

    $$f(A_n) = a_mA_n^m + a_{m-1}A_n^{m-1} + \cdots + a_1A_n + a_0E_n$$

    为方阵 A 的一个多项式。

41. 矩阵的转置

    设 A 是 $m \times n$ 矩阵，把 A 的第 i 行第 j 列的元素 a_{ij} 放到新矩阵第 j 列第 i 行的位置,$i = 1, 2, \cdots, m; j = 1, 2, \cdots, n$, 得到的矩阵称为矩阵 A 的转置矩阵，记为 A^{T}。

42. 对称矩阵

    若矩阵 $A^{\mathrm{T}} = A$, 则称 A 为对称矩阵。

43. 反对称矩阵

    若矩阵 $A^{\mathrm{T}} = -A$, 则称 A 为反对称矩阵。

44. 逆矩阵

    设 A 为 n 阶方阵，如果存在 n 阶方阵 B，使得

    $$AB = BA = E,$$

    则称 A 为可逆的，称 B 为 A 的逆矩阵。记作 $B = A^{-1}$。

45. 伴随矩阵

    设 n 阶方阵 $A = (a_{ij})_{n\times n}$，行列式 $\det A$ 的每个元素的代数余子式 A_{ij} 所构成的如下矩阵：

    $$A^* = (A_{ij})^{\mathrm{T}}_{n\times n} = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & \cdots & A_{n1} \\ A_{12} & A_{22} & \cdots & a_{n2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ A_{1m} & A_{2m} & \cdots & A_{nm} \end{pmatrix}$$

    称为矩阵 A 的伴随矩阵。

46. 分块矩阵
把一个矩阵看成 (子) 矩阵的矩阵，把参与运算的每个小矩阵在运算过程中如同数值一样进行处理。

47. 子式
在矩阵 $A_{m\times n}$ 中，任取 k 行，k 列 $(k\leq m, k\leq n)$, 位于这些行列交叉处的 k^2 个元素，按原有的位置次序所构成的 k 阶行列式，称为 A 的 k 阶子式。

48. 矩阵的秩
矩阵 A 的非零子式的最高阶数，称为矩阵 A 的秩，记作 $r(A)=r$。

49. 行满秩矩阵
对矩阵 $A_{m\times n}$, 若 $r(A)=m$, 则称 A 为行满秩矩阵。

50. 列满秩矩阵
对矩阵 $A_{m\times n}$, 若 $r(A)=n$, 则称 A 为列满秩矩阵。

51. 矩阵的等价
如果矩阵 A 可以经过一些初等变换变成 B, 则称这两个矩阵是等价的。

52. 初等矩阵
对单位矩阵实施一次初等变换得到的矩阵称为初等矩阵。

53. n 维行向量
设 $a_1,a_2,\ldots,a_n$ 是 R 上的 n 个数，则有序数组 $(a_1,\ldots,a_n)$ 为 R 上的 n 维行向量。

54. n 维列向量
设 $a_1,a_2,\ldots,a_n$ 是 R 上的 n 个数，则有序数组 $(a_1,\ldots,a_n)^{\mathrm{T}}$ 为 R 上的 n 维行向量。

55. 线性空间
对于集合 V, 若 V 满足:
$\forall\alpha,\beta,\gamma\in V,\forall\lambda,\mu\in R,$

- $\alpha+\beta=\beta+\alpha$
- $(\alpha+\beta)+\gamma=\alpha+(\beta+\gamma)$
- $\exists 0\in V, s.t. 0+\alpha=\alpha+0=\alpha$
- $\forall\alpha\in V,\exists\beta\in V, s.t. \alpha+\beta=\beta+\alpha=0$
- $(\lambda+\mu)\alpha=\lambda\alpha+\mu\alpha$
- $\lambda(\alpha+\beta)=\lambda\alpha+\lambda\beta$
- $(\lambda\mu)\alpha=\lambda(\mu\alpha)=\mu(\lambda\alpha)$
- $\exists 1\in V, s.t. 1\alpha=\alpha$

56. 线性组合
设 $\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_s$ 都是 n 维向量，$k_1,k_2,\ldots,k_s$ 是数，则称向量

$$k_1\alpha_1+k_2\alpha_2+\cdots+k_s\alpha_s$$

是向量组 $\{\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_s\}$ 的线性组合。

57. 向量的线性表示

设 $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_s$ 都是 n 维向量，如果 n 维向量 η 可以写成 $\{\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_s\}$ 的线性组合，则称 η 可以由 $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_s$ 线性表示。

58. 向量组的线性表示

设 $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_s$ 都是 n 维向量，如果 n 维向量组 $\{\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_s\}$ 可以被 $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_s$ 的线性表示，则称向量组 $\{\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_s\}$ 可以由 $\{\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_s\}$ 线性表示。

59. 向量组的等价

如果两组向量可以互相线性表示，则称这两组向量是等价的。

60. 子空间

设 S 为 $R^n = (a_1, a_2, \ldots, a_n)^{\mathrm{T}}$ 的非空子集且对加法和乘法封闭，则称 S 为 R^n 的一个子空间。

61. 核空间

设 $A_{s\times n}$, 则齐次线性方程组 $Ax = 0$ 的解的全体所构成的集合

$$K(A) = \{x \in R^n | Ax = 0\}$$

称为矩阵 A 的核空间或者零空间，也称为该齐次方程组的解空间。

62. 列空间

设 $A_{s\times n}$, 则集合

$$R(A) = \{\eta \in R^s | \exists x \in R^n, \eta = Ax\}$$

称为矩阵 A 的列空间或者值域。

63. 生成子空间

设 $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_s \in R^n$, 则记

$$L(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_s) = \{k_1\alpha_1 + k_2\alpha_2 + \ldots + k_s\alpha_s | k_i \in R\}$$

为由 $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_s$ 生成的子空间，称 $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_s$ 为这个空间的生成元。

64. 线性相关

给定向量组 $\{\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_s\}$, 如果存在一组不全为零的数 $k_1, k_2, \ldots, k_s$, 使得

$$k_1\alpha_1 + k_2\alpha_2 + \ldots + k_s\alpha_s = 0,$$

则称该向量组线性相关。

65. 线性无关

给定向量组 $\{\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_s\}$, 如果只有当 $k_1 = k_2 = \cdots = k_s = 0$ 时, 才能使得

$$k_1\alpha_1 + k_2\alpha_2 + \ldots + k_s\alpha_s = 0,$$

则称该向量组线性无关。

66. 极大线性无关组

设向量组 $\{\alpha_{i_1}, \alpha_{i_2}, \ldots, \alpha_{i_r}\}$ 是向量组 $I = \{\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_s\}$ 的部分向量组，且满足

- $\{\alpha_{i_1}, \alpha_{i_2}, \ldots, \alpha_{i_r}\}$ 线性无关；
- I 中被一个向量都可以由 $\{\alpha_{i_1}, \alpha_{i_2}, \ldots, \alpha_{i_r}\}$ 线性表示，

则称 $\{\alpha_{i_1},\alpha_{i_2},\ldots,\alpha_{i_r}\}$ 为向量组 I 的一个极大线性无关组，简称极大无关组。

67. 向量组的秩
向量组 $I=\{\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_s\}$ 的极大无关组所含向量的个数称为这个向量组的秩，记为 $r\{\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_s\}$.

68. 向量组的行秩
矩阵 A 的行向量组的秩称为矩阵 A 的行秩。

69. 向量组的列秩
矩阵 A 的列向量组的秩称为矩阵 A 的列秩。

70. 基
设 $\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_s$ 是向量空间 V 中一组向量，如果满足

- $\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_s$ 线性无关
- V 中任意向量可由 $\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_s$ 线性表示

则称 $\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_s$ 为 V 的一个基。

71. 维数
把基所含向量的个数 s 称为 V 的维数, 记作 $\dim V=s$.

72. 坐标
设 $\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_s$ 为 V 的一个基, 对任意向量 $\beta\in V$, 如果

$$\beta=x_1\alpha_1+x_2\alpha_2+\cdots+x_n\alpha_n,$$

则称 $(x_1,x_2,\cdots,x_n)$ 为 β 关于基 $\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_s$ 的坐标, 数 x_i 称为 β 关于基 $\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_s$ 的第 i 个分量。

73. 过渡矩阵
设 $\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_n$ 和 $\beta_1,\beta_2,\ldots,\beta_n$ 是 V 中两组基，如果有

$$(\beta_1,\beta_2,\ldots,\beta_n)=(\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_n)\begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} & \cdots & c_{1n} \\ c_{21} & c_{22} & \cdots & c_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ c_{n1} & c_{n2} & \cdots & c_{nn} \end{pmatrix},$$

则称 $C=(c_{ij})_{n\times n}$ 是从基 $\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_n$ 到基 $\beta_1,\beta_2,\ldots,\beta_n$ 的过渡矩阵。

74. 内积
设 $\alpha,\beta\in R^n$,$\alpha=\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \cdots \\ a_n \end{pmatrix}$,$\beta=\begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \cdots \\ b_n \end{pmatrix}$, 称实数

$$a_1b_1+a_2b_2+\cdots+a_nb_n$$

为向量 α 和 β 的内积，记为 $<\alpha,\beta>$.

75. 模

设 $\alpha = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \cdots \\ a_n \end{pmatrix}$, 称 $\|\alpha\| = \sqrt{<\alpha, \alpha>} = \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + \cdots + a_n^2}$ 为向量 α 的模（长度）。

76. 单位向量

当 $\|\alpha\| = 1$ 时，称 α 为单位向量。

77. 夹角

设非零向量 α 和 β, 它们的夹角 θ 由以下公式定义：

$$\cos\theta = \frac{<\alpha, \beta>}{\|\alpha\| \, \|\beta\|}.$$

78. 正交

设 $\alpha, \beta \in R^n$, 当 $<\alpha, \beta>= 0$ 时，称 α 与 β 正交。

79. 正交向量组

两两正交的非零向量组称为正交向量组，简称正交组。

80. 单位正交组

如果一个正交组的每个向量都是单位向量，称它时单位正交组。

81. 标准正交基

向量空间 V 中的基如果是一个单位正交组，则称此基是 V 的标准正交基。

82. 正交矩阵

如果实方阵 A 满足

$$AA^{\mathrm{T}} = A^{\mathrm{T}}A = E,$$

则称方阵 A 为正交矩阵。

83. 基础解系

对于齐次线性方程组 $Ax = 0$, 它的解空间 $K(A)$ 的一组基称为这个线性方程组的基础解系。

84. 齐次线性方程组的通解

设 A 为秩为 r 的 $m \times n$ 型矩阵,$\xi_1, \xi_2, \cdots, \xi_{n-r}$ 是 $Ax = 0$ 的基础解系，则该齐次线性方程组的通解为

$$x = c_1\xi_1 + c_2\xi_2 + \cdots + c_{n-r}\xi_{n-r}, c_i \in R.$$

85. 导出组

称齐次方程组 $Ax = 0$ 为非齐次方程组 $Ax = b$ 的导出组。

86. 非齐次线性方程组的一般解

设 A 为秩为 r 的 $m \times n$ 型矩阵,γ 是非齐次线性方程组 $Ax = b$ 的特解，$\xi_1, \xi_2, \cdots, \xi_{n-r}$ 是导出组 $Ax = 0$ 的基础解系，则该非齐次线性方程组的一般解为

$$x = \gamma + c_1\xi_1 + c_2\xi_2 + \cdots + c_{n-r}\xi_{n-r}, c_i \in R.$$

87. 特征值与特征向量
假设 A 是 $n\times n$ 型矩阵，λ_0 是一个数，η 是 n 维非零列向量。若

$$A\eta=\lambda_0\eta,$$

则称 λ_0 是 A 的特征值，η 是 A 的相应于特征值 λ_0 的特征向量。

88. 特征多项式
假设 A 是 $n\times n$ 型矩阵，则行列式 $|\lambda E-A|$ 是矩阵 A 的特征多项式。

89. 矩阵的迹
对于矩阵 $A=(a_{ij})_{n\times n}$, 称 $a_{11}+a_{22}+\cdots+a_{nn}$ 为 A 的迹，记作 $\mathrm{tr}(A)$.

90. 化零多项式
设 A 为方阵，$f(\lambda)$ 是多项式，且 $f(A)=0$, 则称 $f(\lambda)$ 为方阵 A 的化零多项式。

91. 相似矩阵
设 A 和 B 都是 n 阶方阵，若有可逆矩阵 P, 使 $P^{-1}AP=B$, 则称矩阵 A 与 P 相似。记为 $A\sim B.P$ 为相似变换矩阵。

92. 相似对角化
若矩阵 A 相似于某个对角矩阵，则称矩阵可以相似对角化。

93. 二次型
n 个变量 $x_1,\cdots,x_n$ 的实二次齐次多项式

$$\begin{aligned}f(x_1,\cdots,x_n)=&a_{11}x_1^2+2a_{12}x_1x_2+\cdots+2a_{1n}x_1x_n\\&+a_{22}x_2^2+2a_{23}x_2x_3+\cdots+2a_{2n}x_2x_n\\&+\cdots+a_{nn}x_n^2\end{aligned}$$

称为一个 n 元二次型。也可写成

$$f(x_1,\cdots,x_n)=x^{\mathrm{T}}Ax$$

其中

$$A=\begin{pmatrix}a_{11}&a_{12}&\cdots&a_{1n}\\a_{12}&a_{22}&\cdots&a_{2n}\\\vdots&\vdots&\ddots&\vdots\\a_{1n}&a_{2n}&\cdots&a_{nn}\end{pmatrix},x=(x_1,\cdots,x_n)^{\mathrm{T}}$$

A 称为二次型的矩阵。

94. 二次型的秩
称矩阵 A 的秩为二次型 $f(x_1,\ldots,x_n)=x^{\mathrm{T}}Ax$ 的秩。

95. 标准形
只含平方项，不含交叉项的二次型称为标准形。其矩阵为对角矩阵。

96. 合同
设 A,B 是同阶方阵，若存在可逆矩阵 P, 使得 $P^{\mathrm{T}}AP=B$, 则称 A 与 B 合同。记作 $A\simeq B$.

97. 惯性指数

把二次型 $f(x_1,\dots,x_n)=x^{\mathrm{T}}Ax$ 的标准形 $k_1y_1^2+\cdots+k_ny_n^2$ 中的正项的个数 p 和负项的个数 q 分别称为该二次型（或矩阵 A）的正惯性指数和负惯性指数。

98. 规范形

设二次型 $f(x_1,\dots,x_n)$ 的秩为 r, 正惯性指数为 p, 则可以通过可逆线性变换将其化为 $y_1^2+\cdots+y_p^2-y_{p+1}^2-\cdots-y_r^2$, 该式称为二次型的规范形。

99. 正定性

设实二次型 $f(x)=x^{\mathrm{T}}Ax$ 满足：

对 R^n 中任何非零向量 x, 有 $f(x)>0$, 则称之为正定二次型，称 A 为正定矩阵。

对 R^n 中任何非零向量 x, 有 $f(x)<0$, 则称之为负定二次型。称 A 为负定矩阵。

100. 顺序主子式

对于方阵

$$A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

它的顺序主子式为

$$\Delta_1=A_{11},\Delta_2=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix},\dots,\Delta_n=|A|$$

2 性质

1. 一次对换改变排列的奇偶性

2. 行列式的性质

   - 排序定义的推广

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}=\sum_{\substack{i_1i_2\cdots i_n \\ \text{为}12\cdots n\text{的全排列}}}(-1)^{\tau(i_1i_2\cdots i_n)+\tau(j_1j_2\cdots j_n)}a_{i_1j_1}a_{i_2j_2}\cdots a_{i_nj_n}.$$

   - $|A^{\mathrm{T}}|=|A|$
   - 行列式的某一行 (列) 乘常数 k, 其行列式等于原行列式乘 k
   - 行列式两行 (列) 互换，行列式变号，值不变
   - 行列式的某一行 (列) 的每个元素都是两个数之和，则此行列式等于两个行列式之和。

     形如：

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ b_1+c_1 & b_2+c_2 & \cdots & b_n+c_n \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ b_1 & b_2 & \cdots & b_n \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}+\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ c_1 & c_2 & \cdots & c_n \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

- 行列式的某一行 (列) 的 k 倍加到另一行 (列)，行列式不变。
- 若行列式某两行 (列) 对应成比例，则行列式值为 0
- 若行列式某一行 (列) 均为 0，则行列式值为 0
- $|AB| = |A||B|$
- 对于 n 阶矩阵 A，$|kA| = k^n|A|$

3. 代数余子式的性质
   设 A_{ij} 为行列式 $|A|$ 在 (i,j) 处的代数余子式，则

$$a_{i1}A_{j1} + a_{i2}A_{j2} + \cdots + A_{in}A_{jn} = \begin{cases} |A| & i = j \\ 0 & i \neq j \end{cases}$$

4. 特殊行列式的值

- 对角行列式

$$\begin{vmatrix} a_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & a_{22} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}\cdots a_{nn}$$

- 三角行列式

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}\cdots a_{nn}$$

$$\begin{vmatrix} a_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}\cdots a_{nn}$$

- Vandermonde 行列式

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ a_1 & a_2 & \cdots & a_n \\ a_1^2 & a_2^2 & \cdots & a_n^2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_1^{n-1} & a_2^{n-1} & \cdots & a_n^{n-1} \end{vmatrix} = \prod_{1 \le i < j \le n} (a_j - a_i)$$

5. 任意方程组都可以经过若干次初等变换化成阶梯形方程组

6. 任意矩阵均可经过有限次初等行变换化为行最简型，得到的行最简型与采取的初等行变换过程无关

7. 矩阵的加法的性质

- $A + B = B + A$
- $(A + B) + C = A + (B + C)$
- $A + O = O + A = A$

- $A+(-A)=(-A)+A=O$

8. 矩阵的数乘的性质
   - $(kl)A=k(lA)$
   - $(k+l)A=kA+lA$
   - $k(A+B)=kA+kB$
   - $1A=A$
   - $0A=O$

9. 矩阵的乘法的性质
   - $(AB)C=A(BC)$
   - $k(AB)=(kA)B=A(kB)$
   - $A(B+C)=AB+AC$
   - $(B+C)A=BA+CA$
   - $EA=AE=A$

10. 矩阵的幂的性质
    - $A^mA^n=A^{m+n}$
    - $(A^m)^n=A^{mn}$

11. 矩阵的转置的性质
    - $(A^{\mathrm{T}})^{\mathrm{T}}=A$
    - $(A+B)^{\mathrm{T}}=A^{\mathrm{T}}+B^{\mathrm{T}}$
    - $(kA)^{\mathrm{T}}=kA^{\mathrm{T}}$
    - $(AB)^{\mathrm{T}}=B^{\mathrm{T}}A^{\mathrm{T}}$

12. 矩阵的伴随阵的性质
    - $AA^*=A^*A=|A|E$
    - $(A_1A_2)^*=A_2^*A_1^*$
    - $(A^*)^*=|A|^{n-2}A$
    - $|A^*|=|A|^{n-1}$
      ($|A|=0$ 时亦适用，注意证明)

13. 矩阵的逆的性质
    - $(kA)^{-1}=\frac{1}{k}A^{-1}$
    - $(A_1A_2)^{-1}=A_2^{-1}A_1^{-1}$
    - $(A^{-1})^{-1}=A$
    - $|A^{-1}|=\frac{1}{|A|}$
    - $(A^{\mathrm{T}})^{-1}=(A^{-1})^{\mathrm{T}}$
    - 当矩阵 A 可逆时，$AB=AC$ 可推出 $B=C$

14. Laplace 定理

设 n 阶方阵 $A = \begin{pmatrix} A_1 & & & \\ & A_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & A_s \end{pmatrix}$, 其中每个 A_i 分别为 n_i 阶方阵，则

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} A_1^{-1} & & & \\ & A_2^{-1} & & \\ & & \ddots & \\ & & & A_s^{-1} \end{pmatrix}$$

15. 矩阵的秩的性质

- $r(A) = r$ 等价于 A 至少存在一个 r 阶非零子式，同时 A 的所有 $r+1$ 阶子式为零
- 行阶梯形矩阵的秩等于它的行阶梯数
- 初等行变换不改变矩阵的秩
- 一个矩阵与任意可逆矩阵的乘积的秩等于该矩阵的秩
- 可逆阵的秩等于它的阶数
- 设矩阵 $A_{m\times n}$ 的秩 $r(A) = r$, 则经过一系列初等变换，可以得到与矩阵 A 等价的矩阵 $\begin{pmatrix} E_r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$
- 设矩阵 $A_{m\times n}$ 的秩 $r(A) = n < m$, 则经过一系列初等行变换，可以得到与矩阵 A 等价的矩阵 $\begin{pmatrix} E_r \\ 0 \end{pmatrix}$
- 设矩阵 $A_{m\times n}$ 的秩 $r(A) = m < n$, 则经过一系列初等列变换，可以得到与矩阵 A 等价的矩阵 $\begin{pmatrix} E_r & 0 \end{pmatrix}$
- 若 n 阶方阵 A 可逆，则 A 必可以经过一系列初等行变换 (或一系列初等列变换) 化为单位阵 E_n
- 若 $r(A) = r(B)$, 则存在可逆矩阵 P 和 Q, 使 $B = PAQ$
- $r(A^T) = r(A)$
- $\max\{r(A_1), r(A_2)\} \le r(\begin{pmatrix} A_1 \\ A_2 \end{pmatrix}) \le r(A_1) + r(A_2)$
- $r(A+B) \le r(A) + r(B)$
- $r(AB) \le \min\{r(A), r(B)\}$
- $r(AB) \ge r(A) + r(B) - n$

16. 初等变换与初等矩阵

- 对矩阵 A 作一次初等行变换，相当于用相应的初等矩阵左乘 A
- 对矩阵 A 作一次初等列变换，相当于用相应的初等矩阵右乘 A

17. 方阵 A 可逆当且仅当 A 可以写成一系列初等矩阵的乘积

18. 向量组的等价的性质

- 如果向量组 $\{\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s\}$ 与 $\{\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_t\}$ 等价，则矩阵 $(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s)$ 与 $(\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_t)$ 等价
- 两个矩阵的行向量组等价与列向量组等价没有关系
- 如果向量组 $\{\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s\}$ 与 $\{\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_t\}$ 等价，且它们均线性无关，则 $t=s$

19. 线性相关的性质

- 当 $m>n$ 时，任意 m 个 n 维向量线性相关
- 设向量组 $\{\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s\}$ 线性无关，而向量组 $\{\beta,\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s\}$ 线性相关，则向量 β 一定能用 $\{\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s\}$ 唯一地线性表示

20. 极大无关组的性质
同一个向量组的任意两个极大无关组等价，且每一组极大无关组的个数是一样的

21. 向量组的秩的性质

- 如果向量组 $\{\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s\}$ 可以由向量组 $\{\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_t\}$ 线性表示,则 $r\{\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s\}\leq r\{\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_t\}$
- 等价的向量组有相同的秩
- 秩为 r 的向量组中任意 r 个线性无关的向量，均为该向量组的一个极大无关组
- 矩阵的行秩等于列秩，均等于矩阵的秩
- $0\leq r\{\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s\}\leq s$
- $r\{\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s\}=0$ 当且仅当 $a_1=a_2=\cdots=a_s=0$
- $r\{\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s\}=s$ 等价于 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s$ 线性无关
- $r\{\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s\}<s$ 等价于 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s$ 线性相关

22. 对矩阵进行初等行变换，不会改变其列向量间的线性关系。

23. Cauchy-Schwarz 不等式
$$|<\alpha,\beta>|\leq\|\alpha\|\,\|\beta\|$$
当且仅当 α 与 β 共线时等号成立

24. 三角不等式
$$\|\alpha+\beta\|\leq\|\alpha\|+\|\beta\|$$
当且仅当 α 与 β 同向共线时等号成立

25. 正交组的性质

- 设 $\{\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_r\}$ 是一个正交组，则 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_r$ 线性无关
- 设 $\{\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_m\}$ 是 n 维向量空间 R^n 的一组线性无关的向量组，则存在一个正交组 $\{\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_m\}$,使 $\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_m$ 可以由 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_m$ 线性表示

26. 正交矩阵的性质

- 若 A 为正交矩阵，则 $|A|=\pm1$
- 若 A 和 B 均为正交矩阵，则 AB 为正交矩阵
- 正交矩阵的列向量组构成正交组。

27. 对于齐次线性方程组 $Ax=0$, 当它的系数矩阵 A 的秩 $r(A)=r$ 时，$\dim(K(A))=n-r$

28. 特征多项式的性质
假设矩阵 $A=(a_{ij})_{n\times n}$, 则

- $|\lambda E-A|$ 是 n 次多项式，且其 n 次项的系数为 1
- $|\lambda E-A|$ 的 $n-1$ 次项的系数为 $-(a_{11}+a_{22}+\cdots+a_{nn})$
- $|\lambda E-A|$ 的常数项为 $(-1)^n A$

29. 特征值的性质

- n 阶方阵有 n 个特征值 (包含重根)
- 假设矩阵 $A=(a_{ij})_{n\times n}$ 的特征值为 $\lambda_1,\lambda_2,\ldots,\lambda_n$, 则

$$\sum_{i=1}^{n}\lambda_i=\mathrm{tr}(A),\prod_{i=1}^{n}\lambda_i=|A|$$

- 如果 λ_0 是可逆矩阵 A 的特征值，则 $\lambda_0\neq 0$, 且 λ_0^{-1} 是 A^{-1} 的特征值。特别地，若 $A\eta=\lambda\eta$, 则 $A^k\eta=\lambda^k\eta$.
- 如果 λ_0 是矩阵 A 的特征值，$f(\lambda)$ 是多项式，并且 $f(A)=O$, 则 A 的特征值全是 $f(\lambda)=0$ 的根
- 若已知矩阵 A 的特征值为 $\lambda_1,\lambda_2,\ldots,\lambda_n$, 则 $A^*=\lambda_1\lambda_2\cdots\lambda_n A^{-1}$.

30. 特征向量的性质
假设 $\eta_1,\eta_2,\cdots,\eta_s$ 是矩阵属于不同特征值 $\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_s$ 的特征向量，则 $\eta_1,\eta_2,\cdots,\eta_s$ 是线性无关。

31. 化零多项式的性质
矩阵 A 的特征值全是它的化零多项式 $f(\lambda)=0$ 的根。
A 的化零多项式的根未必都是 A 的特征值。

32. 矩阵相似的性质

- 若矩阵相似，则必等价。反之不然。
- 若 $A\sim B$, 且 A 可逆，则 $A^{-1}\sim B^{-1}$.
- 设 $A\sim B$,f 是一个多项式，则 $f(A)\sim f(B)$.
- 相似矩阵有相同的特征多项式和特征值。(不一定有相同的特征向量)
- 若 $A\sim B$, 则 $|A|=|B|$.
- 若 $A\sim B$, 则 $r(A)=r(B)$.

33. 实对称矩阵的性质

- 实对称矩阵的特征值都是实数
- 实对称矩阵的属于不同特征值的特征向量两两正交
- 若 A 是实对称矩阵，则存在正交矩阵 Q, 使得 $Q^{\mathrm{T}}AQ$ 是对角矩阵。
- 若 A 是实对称矩阵，则 A 与对角矩阵合同。

34. 矩阵合同的性质

- $A \simeq A$
- 若 $A \simeq B$, 则 $B \simeq A$
- 若 $A \simeq B$,$B \simeq C$, 则 $A \simeq C$.
- 两个 n 阶实对称矩阵 A 和 B 合同的充要条件是它们具有相同的秩和正惯性指数。

35. 主轴定理
二次型 $f(x_1, \cdots, x_n) = x^{\mathrm{T}}Ax$ 可经正交变换 $x = Qy$ 化为标准形 $\lambda_1 y_1^2 + \cdots + \lambda_n y_n^2$, 其中 $\lambda_1, \cdots, \lambda_n$ 为 A 的特征值。

36. 惯性定理
二次型 $f(x_1, \ldots, x_n) = x^{\mathrm{T}}Ax$ 可经可逆线性变换化为标准形
$$f(x_1, \ldots, x_n) = k_1 y_1^2 + \cdots + k_n y_n^2$$
其中 $k_1, \ldots, k_n$ 中非零的个数 $r = r(f)$, 并且正项个数 p 与负项个数 $q(p+q=r)$ 都是可逆线性变换下的不变量。

37. 设 n 阶实对称矩阵 A 的秩为 r, 正惯性指数为 p, 则存在可逆阵 P, 使
$$P^{\mathrm{T}}AP = \begin{pmatrix} 1 &&&&&&&& \\ & \ddots &&&&&&& \\ && 1 &&&&&& \\ &&& -1 &&&&& \\ &&&& \ddots &&&& \\ &&&&& -1 &&& \\ &&&&&& 0 && \\ &&&&&&& \ddots & \\ &&&&&&&& 0 \end{pmatrix} \begin{array}{l} \\ p\text{个}1 \\ \\ \\ (r-p)\text{个}-1 \\ \\ \\ (n-r)\text{个}0 \\ \\ \end{array}$$
由于 P 和 p^{T} 是可逆的，故两个矩阵是等价的。

38. 正定矩阵的性质

- 设 A 是正定矩阵，则 $|A| > 0, \mathrm{tr}(A) > 0$.
- 可逆线性变换不改变二次型的正定性
- 合同的实对称矩阵的正定性相同
- 同阶正定矩阵的和仍为正定矩阵

3 方法

1. 一般数字行列式 $|(a_{ij})_{n\times n}|$ 的计算步骤：

- 化为上三角或者下三角行列式：
  (a) 检查第一列是否有非零元，若无，行列式为零；
  (b) 若有，必要时可交换两行 (行列式变号)，使 (1,1) 位置非零；
  (c) 把第一行的适当倍数加到其它行，使第一列上其他位置均为零；

   (d) 再对得到的 $n-1$ 阶行列式的 (1,1) 子式重复前面三步，最后得到一个上三角行列式，对角元乘在一起就得到该行列式。

- 分解行列式，递推法
- 按行或者按列展开

2. 解含有 n 个方程的 n 元线性方程组

   - Cramer 法则
     对于线性方程组
     $$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \vdots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \ldots + a_{nn}x_n = b_n \end{cases},$$
     设
     $$D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix},$$
     D_i 为将 D 的第 i 列替换为方程组的常数项，那么原方程组的解为
     $$x_i = \frac{D_i}{D}, i = 1, 2, \ldots, n.$$
   - 逆矩阵法
     求系数矩阵的逆矩阵，故解向量为常数矩阵左乘系数矩阵的逆矩阵。即：
     $$Ax = b, x = A^{-1}b.$$

3. 解含有 n 个方程的 m 元线性方程组

   - Gauss 消元法
     通过对方程组进行换位变换 (互换两个方程的位置)、倍乘变换 (用一个非零的数同乘某一个方程的等号两端)、消去变换 (把一个方程的等号两端同乘以 k 倍，分别加到另一个方程的等号两端)，来尽可能地减少变量的个数，再利用回代的方法求出线性方程组的解。
   - 对增广矩阵进行初等行变换
     对增广矩阵进行初等行变换，将其化成行阶梯型矩阵，相应的方程组也就成了阶梯形方程组。
     当该线性方程组有无穷多解，并要求其通解时，将其化为行最简型，然后转换成方程组形式即可。

4. 解矩阵方程
   对于矩阵方程 $AX = B$，对矩阵 (A, B) 进行初等行变换，使其化为 (B, C)（或对矩阵 $\binom{A}{B}$ 进行初等列变换，使其化为 $\binom{B}{C}$），从而 $X = C$ 即为矩阵方程的解。

5. 判断含有 n 个方程的 m 元线性方程组的解的个数
   对于线性方程组
   $$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n = b_n \end{cases},$$
   其系数矩阵为 A, 增广矩阵为 (A, b),

   - 无解
     $r(A) < r(A, b)$
   - 有唯一解
     $r(A) = r(A, b) = n$
   - 无穷多解
     $r(A) = r(A, b) < n$

6. 判断含有 n 个方程的 m 元齐次线性方程组的解的个数
   当 $s < n$ 时，必有非零解
   当 $s = n$ 时，有非零解的充要条件是系数行列式等于 0

7. 计算矩阵的幂

   - 若 $\alpha\beta = (1)$, 则 $(\beta\alpha)^n = \beta(\alpha\beta)^{n-2}\alpha$。
   - 若 $A = B + C$, 且 $BC = CB$, 则 $A^n = (B + C)^n = \sum_{k=1}^{n} C_n^k B^{n-k} C^k$

8. 求方阵的逆矩阵
   对于 n 阶方阵：

   - 待定系数法
   - 伴随矩阵法
     $$A^{-1} = \frac{1}{|A|} A^*$$
   - 初等变换法
     - 把 A 和 E 并排，构造一个 $n \times (2n)$ 的矩阵 $(A : E)$; 对 $(A : E)$ 实施初等行变换，若干次后，$(A : E) \to (E : A^{-1})$。
     - 把 A 和 E 并列，构造一个 $(2n) \times n$ 的矩阵 $\binom{A}{E}$; 对 $\binom{A}{E}$ 实施初等列变换，若干次后，$\binom{A}{E} \to \binom{E}{A^{-1}}$。

9. 判断矩阵可逆
   对于 n 阶矩阵 A_n,A_n 可逆当且仅当：

   - $|A_n| \neq 0$
   - $r(A_n) = n$
   - A 可以写成一系列初等矩阵的乘积
   - A 的行最简形矩阵为 E
   - A 的特征值均不为 0

10. 已知 n 阶矩阵 A 满足 $A^2-2A+3E=0$, 求 $(A+E)^{-1}$：

$$(A+E)(A-3E)=-6E,(A+E)(-\frac{1}{6}A-\frac{1}{2}E)=E$$
$$(A+E)^{-1}=-\frac{1}{6}A-\frac{1}{2}E$$

11. 已知 A 是二阶方阵，$\boldsymbol{x}$ 是二维非零列向量，若 $A^2\boldsymbol{x}+A\boldsymbol{x}=6\boldsymbol{x}$,$B=(\boldsymbol{x},A\boldsymbol{x})$, 求一矩阵 C, 使得 $AB=AC$.
由于

$$\begin{aligned} AB=A(\boldsymbol{x},A\boldsymbol{x})&=(A\boldsymbol{x},A^2\boldsymbol{x})=(A\boldsymbol{x},6\boldsymbol{x}-A\boldsymbol{x})\\ &=(\boldsymbol{x},A\boldsymbol{x})\begin{pmatrix}0&6\\1&-1\end{pmatrix},\end{aligned}$$

故可取 $C=\begin{pmatrix}0&6\\1&-1\end{pmatrix}$.

12. 计算矩阵的秩
先经初等行变换将矩阵变为阶梯形矩阵，再由阶梯数确定矩阵秩。

13. 证明两个矩阵的秩相等

   - 运用初等变换看两个矩阵是否等价
   - 设两个矩阵为 A,B, 则可通过证明 $AX=0$ 与 $BX=0$ 同解来证明秩相等。

14. 判断向量能否被线性表示
记 $A=(\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_s)$.
则向量 β 可以由 $\{\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_s\}$ 线性表示，当且仅当方程 $AX=\beta$ 有解。

15. 判断向量组之间的线性表示
向量组 $\{\beta_1,\beta_2,\ldots,\beta_s\}$ 可以由 $\{\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_s\}$ 线性表示，当且仅当矩阵方程 $AX=B$ 有解。

16. 判断向量组之间的等价
记 $A=(\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_s)$,$B=(\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_s)$.
则向量组 $\{\beta_1,\beta_2,\ldots,\beta_s\}$ 和 $\{\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_s\}$ 等价，等价于 $r(A)=r(A,B)=r(B)$.

17. 判断向量组是否线性相关
记 $A=(\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_s)$, 则向量组是否线性相关等价于方程组 $AX=0$ 是否有非零解。

18. 求一个向量组的极大无关组的方法
行最简形的主列对应的原矩阵的列是其列向量组的极大无关组。
如果要将非主列用极大无关组线性表示，则要化成行最简形。（初等行变换不改变列向量间的线性关系）。

19. 求过渡矩阵和向量在不同基下的坐标
设 $\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_n$ 和 $\beta_1,\beta_2,\ldots,\beta_n$ 是 V 中两组基,记 $A=(\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_n)$,$B=(\beta_1,\beta_2,\ldots,\beta_n)$, 则由 A 到 B 的过渡矩阵 $C=BA^{-1}$.
如果在基 A 下向量 η 的坐标为 $(a_1,a_2,\ldots,a_n)^{\mathrm{T}}$, 那么在基 B 下向量 η 的坐标可以表示为 $C^{-1}(a_1,a_2,\ldots,a_n)^{\mathrm{T}}$.

20. 求一个线性空间的标准正交基

Schmidt 正交化方法：

设 $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ 是线性空间 V 的一组基，那么 V 的一组标准正交基 $\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_n$ 可以由如下公式给出:

$$
\begin{aligned}
&\beta_1 = \alpha_1 \\
&\beta_2 = \alpha_2 - \frac{<\alpha_2, \beta_1>}{<\beta_1, \beta_1>}\beta_1 \\
&\beta_3 = \alpha_3 - \frac{<\alpha_3, \beta_2>}{<\beta_2, \beta_2>}\beta_2 - \frac{<\alpha_3, \beta_1>}{<\beta_1, \beta_1>}\beta_1 \\
&\quad \cdots \\
&\beta_n = \alpha_n - \frac{<\alpha_n, \beta_{n-1}>}{<\beta_{n-1}, \beta_{n-1}>}\beta_{n-1} - \frac{<\alpha_n, \beta_{n-2}>}{<\beta_{n-2}, \beta_{n-2}>}\beta_{n-2} - \cdots - \frac{<\alpha_n, \beta_1>}{<\beta_1, \beta_1>}\beta_1.
\end{aligned}
$$

21. 求一个齐次线性方程组的基础解系和其通解

设 A 为 $m \times n$ 型矩阵，$r(A) = r < n$, 则齐次线性方程组 $Ax = 0$ 的基础解系的求法是: 将矩阵 A 通过初等行变换，变换成行最简型

$$
\begin{pmatrix}
c_{11} & \cdots & c_{1,j_1-1} & 0 & c_{1,j_1+1} & \cdots & c_{1,j_r-1} & 0 & c_{1,j_r+1} & \cdots & c_{1n} \\
0 & \cdots & 0 & c_{2j_2} & c_{2,j_2+1} & \cdots & c_{2,j_r-1} & 0 & c_{2,j_r+1} & \cdots & c_{2n} \\
\vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\
0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & c_{rj_r} & c_{r,j_r+1} & \cdots & c_{rn} \\
0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\
\vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\
0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0
\end{pmatrix}
$$

- 方法一

  对于每个没有非零首元的列（即第 $2, 3, \ldots, j_1 - 1, j_1 + 1, \ldots, n$ 列，共 $n - r$ 列），它总对应着一个自由未知量。自由未知量与基础解系中的向量一一对应。设第 i 个自由未知量所在列为 b_i, 则该自由未知量对应的基础解系中的一个向量 ξ_i 的第 b_i 行为 1，而第 b_j 行 $(j \neq i, j = 1, 2, \ldots, n - r)$ 为 0. 接着 ξ_i 还有 r 个元素未填充，我们选择原来的行最简型中的第 b_i 列，取前 r 行的元素取相反数，按顺序填入 ξ_i 未填充的部分。如：

$$
\xi_1 = \begin{pmatrix} -c_{12} \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \cdots, \xi_{j_1-2} = \begin{array}{cl} \begin{pmatrix} -c_{1,j_1-1} \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} & \begin{array}{l} , \cdots, \\ \leftarrow \text{第} j_1 - 1 \text{行} \end{array} \end{array}
$$

$$\xi_{n-r}=\left(\begin{array}{c}-c_{1n}\\0\\\vdots\\0\\-c_{2n}\\0\\\vdots\\0\\-c_{3n}\\0\\\vdots\\0\\-c_{rn}\\0\\\vdots\\0\\1\end{array}\right)\begin{array}{l}\\ \\ \\ \leftarrow \text{第}j_1-1\text{行}\\ \\ \leftarrow \text{第}j_1+1\text{行}\\ \\ \leftarrow \text{第}j_3-1\text{行}\\ \\ \\ \\ \leftarrow \text{第}j_n-1\text{列}\\ \\ \\ \\ \\ \\ \end{array}$$

该线性方程组的通解为

$$x=k_1\xi_1+k_2\xi_2+\cdots+k_{n-r}\xi_{n-r}, k_i\in R.$$

- 方法二

  化成行最简型以后，可以以方程组形式求出其通解：(设 $x_{r_1}, x_{r_2}, \ldots, x_{r_{n-r}}$ 为自由未知量)

$$\begin{cases}x_1=t_{11}x_{r_1}+t_{12}x_{r_2}+\cdots+t_{1,n-r}x_{r_{n-r}}\\x_2=t_{21}x_{r_1}+t_{22}x_{r_2}+\cdots+t_{2,n-r}x_{r_{n-r}}\\\cdots\\x_r=t_{r1}x_{r_1}+t_{r2}x_{r_2}+\cdots+t_{r,n-r}x_{r_{n-r}}\end{cases},$$

  然后对于 x_{r_i} 对应的基础解系中的向量 ξ_i, 重复方法一的步骤即可。（注意此时则不需要取相反数）

22. 求一个非齐次线性方程组的一般解

    设 A 为 $m\times n$ 型矩阵，$r(A)=r<n$, 则非齐次线性方程组 $Ax=b$ 的一般解的求法是：将增广矩阵 (A,b) 通过初等行变换，变换成行最简型

$$\begin{pmatrix}c_{11}&\cdots&c_{1,j_1-1}&0&c_{1,j_1+1}&\cdots&c_{1,j_r-1}&0&c_{1,j_r+1}&\cdots&c_{1n}&d_1\\0&\cdots&0&c_{2j_2}&c_{2,j_2+1}&\cdots&c_{2,j_r-1}&0&c_{2,j_r+1}&\cdots&c_{2n}&d_2\\\vdots&\ddots&\vdots&\vdots&\vdots&\ddots&\vdots&\vdots&\vdots&\ddots&\vdots&\vdots\\0&\cdots&0&0&0&\cdots&0&c_{rj_r}&c_{r,j_r+1}&\cdots&c_{rn}&d_r\\0&\cdots&0&0&0&\cdots&0&0&0&\cdots&0&0\\\vdots&\ddots&\vdots&\vdots&\vdots&\ddots&\vdots&\vdots&\vdots&\ddots&\vdots&\vdots\\0&\cdots&0&0&0&\cdots&0&0&0&\cdots&0&0\end{pmatrix}$$

忽略最后一列，得到其导出组 $Ax=0$ 的通解 $\xi_1,\xi_2,\cdots,\xi_{n-r}$。
再令自由未知量均为 0, 得到 $Ax=b$ 的一个特解

$$\gamma=\begin{array}{c}\begin{pmatrix} d_1\\ 0\\ \vdots\\ 0\\ d_2\\ 0\\ \vdots\\ 0\\ d_3\\ 0\\ \vdots\\ 0\\ d_r\\ 0\\ \vdots\\ 0\\ 0\end{pmatrix}\end{array}\begin{array}{l} \\ \\ \\ \leftarrow \text{第}j_1-1\text{行}\\ \\ \leftarrow \text{第}j_1+1\text{行}\\ \\ \leftarrow \text{第}j_3-1\text{行}\\ \\ \\ \\ \leftarrow \text{第}j_n-1\text{列}\\ \\ \\ \\ \\ \\ \end{array}$$

故原非齐次线性方程组 $Ax=b$ 的一般解为

$$x=\gamma+c_1\xi_1+c_2\xi_2+\cdots+c_{n-r}\xi_{n-r},c_i\in R.$$

23. 求矩阵的特征值与特征向量
对于 n 阶方阵 A, 令它的特征多项式 $|\lambda E-A|=0$, 解出的数 λ_i 即为矩阵 A 的特征值。对于每一个特征值 λ_i, 相应于它的特征向量即为方程组 $A-\lambda_iE=0$ 的非零解。从而求出其基础解系即可。

24. 已知向量 η 是矩阵 A 的属于特征值 λ 的一个特征向量，求其中的一些参数。
由定义列出方程 $A\eta=\lambda\eta$, 解方程即可。

25. 判断方阵是否可以相似对角化，并求对角矩阵和相应的相似变换矩阵
对于 n 阶方阵 A, 先通过 $|\lambda E-A|=0$ 求出其互异的特征值 $\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_s,s\le n$. 若 $s=n$, 则 A 可相似对角化。若 $s\ne n$, 且每个 n_i 重特征值 i 对应的基础解系有 n_i 个向量，当且仅当 A 可相似对角化。
设 λ_i 对应的特征向量的基础解系为 $\eta_{i1},\eta_{i2},\ldots,\eta_{in_i}$, 则

$$P=(\eta_{11},\eta_{12},\cdots,\eta_{1n_1},\eta_{21},\eta_{22},\cdots,\eta_{2n_2},\cdots,\eta_{s1},\eta_{s2},\cdots,\eta_{sn_s}).$$

注意到 $n_1+n_2+\cdots+n_s=n$, 则 P 恰好是一个 n 阶方阵。并且有对角矩阵

$$\Lambda=\begin{pmatrix}\lambda_1E_{n_1} & & & \\ & \lambda_2E_{n_2} & & \\ & & \ddots & \\ & & & \lambda_sE_{n_s}\end{pmatrix}.$$

即 λ_i 对应的线性无关的特征向量有几个，就写几个 λ_i.

26. 将实对称矩阵正交相似对角化
设 A 为实对称矩阵。
首先，求出 A 的全部互不相同的特征值 $\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_s$.
对于每一个 λ_i, 求出它对应的特征向量的基础解系
将基础解系用 Schmidt 正交化方法正交化。再将其单位化。（注意只要将每个基础解系正交化，而非所有特征向量正交化。实对称矩阵的不同特征值对应的特征向量组彼此正交。）
用新的基础解系相似对角化 A.

27. 求二次型的矩阵的方法
已知二次型为 $f(x_1, \cdots, x_n) = b_{11}x_1^2 + \cdots b_{ij}x_ix_j + \cdots$, 那么，当 $i \neq j$ 时，二次型对应的实对称矩阵的元素 $a_{ij} = a_{ji} = \dfrac{b_{ij}}{2}$. 当 $i = j$ 时，$a_{ii} = b_{ii}$.

28. 化二次型为标准形的方法
    - 主轴定理法
    先求出二次型的矩阵的特征值，然后用主轴定理即可。（标准形在不计特征值顺序时是唯一的）
    - 拉格朗日配方法
        (a) 若二次型中含有 x_i 的平方项，则先把含 x_i 的各项配成平方项，然后再依此法对其他变量配方。
        (b) 若二次型中不含任何平方项，但有 $a_{ij} \neq 0 (i \neq j)$, 则作一可逆线性变换

$$\begin{cases} x_i = y_i + y_j \\ x_j = y_i - y_j \\ x_k = y_k, k \neq i, j \end{cases}$$

        使二次型化为含有平方项的形式，再按上面的方法配方。

29. 判断矩阵合同
两个 n 阶实对称矩阵合同的充要条件是它们具有相同的秩和正惯性指数。

30. 判断矩阵正定
首先，先判断矩阵是实对称矩阵。
接着，以下几个条件等价：
    - A 是正定矩阵
    - A 的特征值均大于 0
    - A 的正惯性指数为 n
    - A 与 E 合同
    - 存在可逆阵 P, 使得 $A = P^{\mathrm{T}}P$
    - A 的顺序主子式都大于 0

31. 判断矩阵负定
矩阵 A 负定当且仅当矩阵 $-A$ 正定